

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
TARIQ SAALI

SYNTHÈSE DES CONNAISSANCES ET RÉSULTATS NOUVEAUX  
CONCERNANT LA VaR CONDITIONNELLE

AOÛT 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## RÉSUMÉ

Popularisée par la banque américaine *J. P. Morgan*, la notion de valeur-à-risque, communément appelée VaR, a rapidement été adoptée par les intervenants des marchés financiers mondiaux. Cette mesure de risque comporte toutefois certains inconvénients, ce qui a récemment conduit à l'introduction d'une nouvelle mesure appelée la VaR conditionnelle. Dans ce mémoire, l'auteur passe d'abord en revue le concept de risque financier et il rappelle les propriétés élémentaires de la notion traditionnelle de VaR. Il motive ensuite l'introduction de la VaR conditionnelle, qu'il définit précisément et illustre dans des cas particuliers. Après avoir énoncé et démontré les principales propriétés de la VaR conditionnelle, il présente les résultats d'une étude visant à comparer deux approches permettant de majorer la VaR conditionnelle de la somme de risques dépendants dont les deux premiers moments sont connus.

## REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été réalisé sous la supervision du professeur Mhamed Mesfioui, en co-direction avec M. Christian Genest, professeur titulaire de statistique à l'Université Laval de Québec. Je les remercie sincèrement d'avoir accepté de diriger ce travail et de m'avoir encouragé et soutenu durant toutes ces années. Le facture de ce document doit beaucoup à leur sens de la minutie et à la fierté du travail bien fait qu'ils m'ont inculquée.

Au professeur Mesfioui, un merci tout spécial pour ses conseils et son appui tout le long de mon parcours universitaire. Au professeur Genest, toute ma gratitude pour son aide technique, chaleureusement accordée.

J'exprime ici ma très vive reconnaissance envers mes chers parents et mes sœurs Houda et Imane pour leur dévouement et leur soutien dans les moments difficiles. Je remercie aussi ma femme Cathie et mes amis sans exception, mais plus particulièrement Moez Srioui, Zine Elabidine Soudani et Abdelkader Siddour. Enfin, un remerciement spécial envers une famille à l'accueil chaleureux que je salue sans la nommer, mais qui se reconnaîtra.

Une partie de mes travaux a été financée par des octrois consentis au professeur Mesfioui par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada. Que M. Mesfioui et ses bailleurs de fonds trouvent ici l'expression de ma gratitude pour cet appui financier.

# TABLE DES MATIÈRES

|  |           |
|--|-----------|
| Résumé   | ii        |
| Remerciements                                      | iii       |
| Liste des tableaux                                 | vi        |
| Liste des figures                                  | vi        |
| <b>1 Introduction</b>                              | <b>1</b>  |
| <b>2 Analyse théorique du risque</b>               | <b>8</b>  |
| 2.1 Historique de la VaR . . . . .                 | 10        |
| 2.2 Définition de la VaR . . . . .                 | 14        |
| 2.2.1 Définition formelle . . . . .                | 14        |
| 2.2.2 Notion de comonotonie . . . . .              | 15        |
| 2.3 Propriétés de la VaR . . . . .                 | 15        |
| 2.4 Limites de la VaR . . . . .                    | 18        |
| 2.4.1 Limites conceptuelles . . . . .              | 19        |
| 2.4.2 Limites résultant d'approximations . . . . . | 22        |
| <b>3 VaR conditionnelle</b>                        | <b>24</b> |
| 3.1 Définition et motivation . . . . .             | 25        |
| 3.2 Propriétés de la VaR conditionnelle . . . . .  | 25        |
| 3.3 Exemples et illustrations . . . . .            | 31        |
| 3.3.1 Formules explicites . . . . .                | 31        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.3.2    | Principe de la méthode de Monte-Carlo . . . . .  | 37        |
| <b>4</b> | <b>Calcul de majorants pour la VaR conditionnelle</b>                                      | <b>43</b> |
| 4.1      | Majorant supérieur univarié de la VaR conditionnelle . . . . .                             | 44        |
| 4.2      | Majorant supérieur de la VaR conditionnelle de la somme de<br>risques dépendants . . . . . | 45        |
| 4.2.1    | Méthode basée sur la comonotonie . . . . .   | 45        |
| 4.2.2    | Méthode basée sur les corrélations . . . . .   | 46        |
| 4.2.3    | Majorants lorsque les risques sont non bornés . . . . .                                    | 47        |
| 4.3      | Comparaisons des deux approches . . . . .  | 48        |
| 4.4      | Exemple numérique . . . . .  | 50        |
|          | <b>Bibliographie . . . . .</b>   | <b>51</b> |

## Liste des tableaux

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>exponentiel lorsque $\lambda = 2$ . . . . .                       | 32 |
| 3.2 | Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>de Pareto lorsque $\lambda = 2$ et $\beta = 4$ . . . . .          | 35 |
| 3.3 | Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>normal centré réduit . . . . .                                    | 39 |
| 3.4 | Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>de Weibull avec paramètres $\lambda = 2$ et $\beta = 4$ . . . . . | 41 |
| 4.1 | Valeurs numériques des deux majorants de la VaR condition-<br>nelle de la somme de $n$ variables Bêta . . . . .                   | 51 |

## Liste des figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>exponentiel lorsque $\lambda = 2$ . . . . .                              | 33 |
| 3.2 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>exponentiel lorsque $\lambda = 2, 4$ , and $10$ . . . . .                | 34 |
| 3.3 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>de Pareto lorsque $\lambda = 2$ et $\beta = 4$ . . . . .                 | 36 |
| 3.4 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>normal centré réduit . . . . .   | 40 |
| 3.5 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>de Weibull avec paramètres $\lambda = 2$ et $\beta = 4$ . . . . .        | 42 |
| 3.6 | Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle<br>de Weibull avec paramètres $\lambda = 2, 4, 10$ et $\beta = 4$ . . . . . | 42 |



# Chapitre 1

## Introduction

Dans un article diffusé plus tôt cette année sur le site *les echos.fr*, le web de *l'économie*, l'auteur Paul Glasserman écrit :

“Le débat sur le risque financier évoque l’histoire des six aveugles qui décrivent un éléphant. L’un tâte la trompe et conclut que l’animal est un serpent, un autre touche une patte et la compare à un arbre. En fait, chacun des aveugles fait une observation strictement exacte et pourtant aucune des descriptions ne rend pleinement compte de la réalité. Le risque financier est au moins aussi difficile à décrire qu’un éléphant. La difficulté n’est pas l’ignorance totale : comme les aveugles de l’histoire, nous pouvons parvenir à tâtons à quelques conclusions partiellement vraies. Pourtant, nous réussissons rarement à décrire parfaitement l’un des facteurs les plus fondamentaux du comportement économique.”

Ces dernières années, les gestionnaires de risques financiers ont porté un intérêt tout particulier à la notion de la valeur-à-risque, ou VaR, comme descripteur concis du risque. L'engouement pour cette mesure de risque a été en bonne partie nourri par les organismes de réglementation, ainsi que par des industries du logiciel et du conseil en pleine expansion. Les établissements financiers et les entreprises exposés à des risques qu'ils tentent de mesurer ont rapidement emboîté le pas.

La VaR est dorénavant une mesure de risque très utilisée. Elle représente le quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de profits et de pertes dans un intervalle de temps donné. En d'autres termes, si  $F$  désigne la fonction de répartition de profits et de pertes  $X$  dans un intervalle de temps donné, alors

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

À titre d'exemple, supposons que nous désirons mesurer le risque d'un portefeuille d'actifs financiers composé de devises, d'obligations, d'actions, de produits dérivés ou d'une combinaison de ces éléments. Pour cela, fixons un laps de temps pendant lequel nous voulons étudier le risque. Nous pourrions alors nous demander quelle serait la perte maximale que nous serions susceptibles de subir sur ce portefeuille dans cet intervalle de temps. La réponse est "une perte totale," car nous pouvons être certains que les pertes du portefeuille ne dépasseront jamais ce montant. Cependant, la perte totale donne une image trop pessimiste du risque, car les chances que la pire issue possible se concrétise sont infimes. En revanche, nous pourrions déterminer un montant en deçà duquel les pertes ont de fortes chances, disons  $100\alpha\%$ , de se situer. Ce montant est précisément celui que l'on appelle la VaR d'ordre  $\alpha$ , notée  $\text{VaR}_\alpha(X)$ .

Si la  $\text{VaR}_\alpha(X)$  est mesurée à un niveau de confiance  $\alpha = 0.95$ , les pertes effectives ne devraient alors dépasser cette estimation que dans 5% des cas. Si cette marge s'avère inconfortable, il nous est loisible de calculer plutôt  $\text{VaR}_\alpha(X)$  au niveau de confiance  $\alpha = 0.99$  et donc de ne sous-estimer la perte que dans 1% des cas, en moyenne. "L'intérêt est qu'en renonçant à un niveau de confiance de 100%, on obtient un tableau plus réaliste des pertes potentielles d'un portefeuille," explique Glasserman (2005), qui poursuit:

"Mais pour apprécier les forces et faiblesses de la VaR, il faut la comparer à d'autres mesures du risque. L'exposition elle-même est une mesure simple, mais grossière, du risque associé à une position financière. Une position de 10 millions de dollars en obligations d'État présente une exposition de 10 millions de dollars, tout comme une position de 10 millions de dollars en valeurs Internet. S'il est théoriquement possible de perdre 10 millions de dollars dans les deux cas, la probabilité de pertes est plus forte dans le second que dans le premier. C'est ce dont la VaR tente de rendre compte. [...]

Le problème des sensibilités est qu'elles ne sont pas comparables d'un marché ou d'un produit à l'autre. Les mesures de durée, par exemple, permettent de comparer les risques des obligations émises par un État, mais elles sont beaucoup moins utiles pour faire des comparaisons internationales ou encore lorsqu'il s'agit d'apprécier les risques sur des obligations par rapport à d'autres catégories d'actifs. En revanche, une VaR est toujours calculée sous forme de montant."

La théorie de portefeuille moderne s'appuie en bonne partie sur le concept statistique de l'écart-type comme mesure du risque. L'écart-type sert à mesurer l'amplitude des fluctuations statistiques de nombreux phénomènes et il est tout naturellement appliqué aux variations de valeur d'un portefeuille. Selon Glasserman (2005) :

“Comme la VaR, l'écart-type intègre des informations sur les probabilités et l'ampleur des pertes. Mais au contraire de la VaR, il suppose implicitement que les profits et les pertes sont des images identiques inversées : une perte de 1 million de dollars s'assortit de la même probabilité qu'un gain de 1 million de dollars et il en est de même pour n'importe quel montant en dollars. Si c'est sans doute pratiquement vrai pour les instruments simples—comme une position de trésorerie dans une monnaie internationale—c'est loin d'être le cas pour des options. Acheter une option crée un potentiel illimité de hausse avec un potentiel de perte limité au coût de l'option. Inversement, vendre des options peut produire un risque à la baisse illimité sans que le profit puisse excéder la prime dégagée sur la vente de l'option. En ne s'attachant qu'aux probabilités de pertes importantes, la VaR peut rendre compte de ce type d'asymétrie alors que l'écart-type, lui, ne le peut pas.”

La VaR a néanmoins certaines limites, qui sont à la fois conceptuelles et théoriques. D'autres résultent d'approximations délibérément choisies. Le concept de VaR s'appuie sur des hypothèses qui sont parfois contestées par les réalités du marché. En effet, plusieurs études empiriques ont montré que

la distribution réelle n'est pas exactement normale, mais qu'elle est souvent asymétrique et qu'elle présente souvent des queues plus épaisses. La capacité des modèles de prévision, qui utilisent les données du passé pour prédire l'avenir, est très limitée malgré la puissance croissante des ordinateurs.

Malgré tout, pour passer d'une VaR d'un jour à une VaR de  $T$  jours, les praticiens multiplient parfois tout simplement la VaR d'un jour par le coefficient  $\sqrt{T}$ . Cette méthode est appréciée principalement pour sa simplicité et sa très facile mise en œuvre. Elle repose essentiellement sur l'hypothèse de normalité et l'indépendance des accroissements des prix des actifs. Ces hypothèses sont fort discutables et ne s'appliquent pas à toutes les périodes.

Dans le but d'évaluer et comparer la mesure de risque fournie par la VaR sous différentes méthodologies et hypothèses, Beder (1995) a composé trois portefeuilles qu'elle a soumis à deux types de mesures, soit une simulation historique basée sur les données des derniers 100 et 250 jours ouvrables, et une simulation de Monte-Carlo avec les corrélations de la méthode **RiskMetrics** et celles du Comité de Bâle, les horizons étant de 1 et 10 jours. Cette étude met en évidence les écarts assez importants pouvant découler du choix de l'une ou l'autre de ces méthodes. De plus, des écarts sont également observables pour une même méthode selon le choix de l'horizon et de la fréquence des données utilisées.

Dans une autre étude, Hendricks (1996) estime la VaR d'un portefeuille fictif composé de devises étrangères et il trouve des résultats différents. L'auteur compare la méthode de la variance-covariance à la méthode de la simulation historique et conclut que, pour des tailles différentes de l'échantillon historique, les deux approches donnent des VaR assez différentes. Un autre

résultat intéressant de cette étude est que la volatilité calculée sur une longue période historique diminue la variabilité de la VaR dans le temps.

Dans leur article, Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999) présentent quatre propriétés que devrait posséder toute mesure de risque “cohérente.” Les auteurs donnent ensuite cinq axiomes équivalents à ces propriétés. Une mesure de risque devient “cohérente” si elle respecte en tout temps ces cinq axiomes. De façon générale, une mesure cohérente respecte le principe de la diversification et fait en sorte qu’un portefeuille moins risqué qu’un autre résulte en une valeur du risque moins élevée. Une des inconvénients de la VaR est qu’elle ne satisfait pas au principe de la diversification. Cela veut dire qu’en général, la VaR ne satisfait pas l’inégalité suivante :

$$\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2) \leq \text{VaR}_\alpha(X_1) + \text{VaR}_\alpha(X_2).$$

Pour cette raison, Artzner et coll. (1999) ont récemment prôné l’emploi de la VaR conditionnelle, ou “expected shortfall,” définie par

$$\text{ES}_\alpha(X) = E\{X|X > \text{VaR}_\alpha(X)\} = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_s(X) ds.$$

Cette mesure peut être interprétée comme la moyenne des pertes excédant la VaR. L’un de ses avantages importants par rapport à la VaR est qu’elle est convexe et sous-additive.

Après avoir rappelé les principales propriétés de la VaR et de sa version conditionnelle, ce mémoire cherchera à comparer deux stratégies de majoration de la VaR conditionnelle de la somme de risques dépendants dont les deux premiers moments sont connus. La première méthode sera basée sur une approche de type corrélation introduite par Genest, Marceau & McFouli (2002). Quant à la seconde, elle sera fondée sur la notion de copule.

Les nouveaux majorants obtenus par l'une et l'autre approche seront ensuite comparés à ceux proposés par Hürlimann (2002).

Le mémoire est structuré comme suit. Dans le chapitre 2, des rappels seront d'abord donnés sur la genèse de la VaR, sa définition, ses principales propriétés et ses limites. Le chapitre 3 sera ensuite consacré à l'étude de la mesure de VaR conditionnelle ; plusieurs propriétés, illustrations et exemples y seront présentés au moyen de différents modèles de probabilités classiques. Enfin, le chapitre 4 fera état d'une étude comparative de certains majorants de la VaR conditionnelle pour la somme de risques dépendants dont les deux premiers moments sont connus.

## Chapitre 2

# Analyse théorique du risque

Dans le cadre de notre analyse, le comportement des investisseurs est supposé rationnel, face à des situations risquées pour lesquelles les prémisses de la théorie admettent une connaissance imparfaite de l'environnement, l'information objective ou subjective étant fournie par les lois de probabilités gouvernant les événements susceptibles de se produire.

Plus précisément, et de façon plus restrictive, nous considérons qu'un agent économique (individu, entreprise, nation) est en position de risque ou d'incertitude s'il se trouve confronté à des situations dont les conséquences se traduisent, pour lui, par des gains ou des pertes monétaires, soldes que nous assimilons à des variables aléatoires dans un univers mono-périodique et à des fonctions aléatoires dans un univers inter-temporel. Les agents sont supposés capables de définir les lois de probabilités sur les conséquences. On parle parfois de perspectives aléatoires.

L'idée la plus simple pour ordonner plusieurs projets risqués consiste à les classer par ordre croissant des espérances mathématiques de leurs résultats.



Malheureusement, ce critère simple tombe sous le coup du célèbre paradoxe de Saint-Petersbourg : un pauvre hère trouve sur son chemin un billet de loterie lui permettant de gagner un million de dollars avec une probabilité de  $1/10$ , puis quelques instants plus tard se voit offrir la possibilité de l'échanger pour 500 \$. C'est cette dernière aubaine que le mendiant saisira, affirmait déjà Daniel Bernoulli, alors que l'espérance mathématique de gain à la loterie est de 100 000 \$ ! Le critère de l'espérance ne peut donc constituer une norme pour guider les choix économiques dans l'incertain.

Les mesures du risque ont bien évolué depuis que Markowitz a avancé sa célèbre théorie de la diversification de portefeuille à la fin des années 1950. Cette théorie devait révolutionner la gestion de portefeuille moderne. L'écart-type était alors la mesure du risque d'un portefeuille efficient. Mais pour un titre, cette mesure n'est pas appropriée. En effet, dans le cas d'un titre individuel, le risque est représenté par la covariance de son rendement avec celui des autres titres qui constituent un portefeuille bien diversifié. L'écart-type du rendement d'un titre comprend les risques diversifiables et non diversifiables. Or, seul le risque non diversifiable est rémunéré par le marché. Ce risque est représenté par la covariance entre le rendement du titre et les rendements des titres qui constituent un portefeuille hautement diversifié.

Les théories du risque qui ont emboîté le pas à celles de Markowitz se sont attachées aux facteurs qui déterminent le risque d'un titre de même qu'à l'équilibre des marchés financiers. Durant les années 1960, Sharp (1963) a proposé le modèle de l'évaluation des actifs financiers, soit le MEDAF ou le CAPMI en anglais. Ce modèle est mono-factoriel, en ce sens qu'il ne

distingue qu'un seul facteur explicatif du risque d'un titre, soit la corrélation entre le rendement de ce titre et celui du portefeuille du marché. C'est ce qu'on appelle le risque systématique du titre, catégorie de risque qui n'est pas diversifiable. Le risque non systématique, ou risque idiosyncratique, est celui qui est particulier à la compagnie qui émet le titre. Comme il est diversifiable, il n'est pas rémunéré par le marché.

Au milieu des années 1970 est apparu un autre modèle du risque basé sur l'absence d'arbitrage : l'APT, acronyme de l'expression *Arbitrage Pricing Theory*. Ce modèle reconnaît que le risque est un phénomène multidimensionnel qui s'explique par plusieurs facteurs. Le modèle APT est donc multifactoriel. Le bêta d'un titre pour un facteur donné est la sensibilité relative du rendement du titre à ce facteur. L'une des faiblesses du modèle APT est qu'il reste muet quant à l'identité des facteurs qui déterminent les rendements des titres.

Récemment, une mesure absolue du risque était proposée : la valeur-à-risque. Cette notion, souvent représentée par l'acronyme VaR, désigne une mesure qui s'implante de plus en plus dans la gestion des institutions financières. Qui plus est, cette mesure permet d'évaluer les risques de type asymétrique, comme celui qui est associé aux options, l'écart-type et le bêta ne permettant pas de prendre en compte ce risque de façon satisfaisante.

## 2.1 Historique de la VaR

Selon Glassemann (2005), deux événements ont concouru à l'adoption unanime de la VaR par le secteur financier. Un troisième, dit-il, a favorisé son

développement parmi les entreprises américaines. Il écrit:

“Le premier date de 1995. Réunis en comité à la *Banque des règlements internationaux* à Bâle, les représentants des banques centrales de 10 grandes économies de l’Ouest ont proposé de nouvelles règles (amendant l’accord de Bâle de 1988), imposant aux établissements financiers un niveau de fonds propres proportionnel aux risques résultant de leurs engagements. Officiellement adoptée en 1996, cette proposition a incité les banques à développer des systèmes internes sophistiqués pour calculer leur VaR. En effet, elles pouvaient ainsi espérer une diminution des fonds propres qu’elles devraient détenir par rapport aux banques qui se fondaient sur les normes édictées par les autorités de tutelle pour déterminer leurs besoins. Ainsi, dès le départ, la recherche d’un allègement des obligations réglementaires a été un important facteur de croissance de la VaR.

Le deuxième événement s’est produit sur Internet. En 1994, la banque américaine *J. P. Morgan* a mis gratuitement son système **RiskMetrics** à la disposition de tous sur Internet. **RiskMetrics** (depuis repris dans une société commune avec *Reuters*, le groupe d’information financière) fournissait les données financières et la méthodologie nécessaires au calcul de la VaR d’un portefeuille. Les autres établissements financiers et les entreprises pouvaient utiliser le calculateur de VaR de **RiskMetrics** ou télécharger les données sur leurs propres systèmes de gestion des risques. Très vite sont apparus de nouveaux fournisseurs de programmes de

gestion des risques exploitant *RiskMetrics*, transformant cette méthodologie en référence incontournable.

Le troisième événement a probablement eu moins d'impact à ce jour, mais c'est l'un des grands facteurs d'expansion de la VaR parmi les entreprises américaines. En 1997 aux États-Unis, la *Securities and Exchange Commission* (SEC), préoccupée des risques cachés derrière les instruments hors bilan, a émis des règles de communication relatives aux produits dérivés employés par les entreprises : celles-ci ont trois solutions pour faire état des risques associés aux instruments dérivés : tableau des valeurs de marché, mesure de sensibilité ou VaR. C'est la raison pour laquelle les rapports annuels de *Microsoft*, de *Philip Morris* et de bien d'autres grandes sociétés présentent maintenant des calculs de VaR.

L'approche de la VaR popularisée par *J. P. Morgan* montre bien que monter au créneau avec une solution imparfaite est parfois plus efficace que d'attendre la perfection pour passer à l'action. En effet, la méthodologie *RiskMetrics* s'appuie sur une série d'hypothèses qui, certes, simplifient le calcul de la VaR, mais ne tiennent pas toujours dans la pratique. Ceux qui ont mis au point cette méthodologie en avaient parfaitement conscience. Maintenant, la plupart de ses utilisateurs le savent sans doute aussi. Pourtant, ce modèle simple a eu son utilité car il a cadré le débat sur la méthodologie de calcul de la VaR et a contribué à focaliser les efforts des professionnels du secteur et des milieux universitaires sur les principaux obstacles sur lesquels se heurte

une estimation précise.”

L’une des hypothèses de base de **RiskMetrics** et de nombreux autres modèles de VaR est que l’on peut décrire le rendement des marchés par la notion statistique de distribution normale, qui sert à décrire aussi bien la taille de prisonniers que les résultats d’examens d’un cours d’introduction à la statistique à l’Université du Québec à Trois-Rivières. Un graphique des rendements des instruments les plus négociés se présente à première vue comme une courbe normale. La plupart des observations se situent dans le milieu, près de la moyenne : les variations très amples à la hausse ou à la baisse sont moins fréquentes. Pourtant, un examen plus attentif révèle une déviation remarquablement cohérente des données de marché par rapport à l’idéal mathématique de la distribution normale. Glasserman (2005) explique :

“En fait, la courbe des rendements de la quasi-totalité des grands marchés et des grandes catégories d’actifs est qualifiée de “léptocurtique” par les statisticiens (et un nombre croissant de gestionnaires de risques). Cela signifie que de trop nombreuses observations interviennent près du centre de la distribution [...] mais ces valeurs proches de la moyenne s’accompagnent inévitablement d’un excès de valeurs extrêmes. [...] Par rapport à la distribution normale idéale, le gestionnaire de risques voit un monde dans lequel les prix du marché varient trop ou trop peu. Cet effet est particulièrement marqué lorsque l’on mesure des rendements à brève échéance (sur un jour ou une semaine). Ce phénomène est

si fréquent qu'il pourrait presque avoir valeur de loi naturelle dans le monde financier."

## 2.2 Définition de la VaR

La VaR est une mesure statistique du risque financier d'un titre ou d'un portefeuille. Plus précisément, la VaR représente le profit ou la perte maximale potentielle sur un actif ou un portefeuille dans un horizon donné de temps, généralement fixé à 95%. Ainsi, la marge d'erreur ayant trait à ce profit ou à cette perte maximale n'est que de 5%.

La VaR est définie comme le quantile d'une distribution de profits et de pertes dans un temps donné. C'est une variable qui dépend de deux données essentielles :

- a) Le niveau de confiance représente la probabilité fixée par le gestionnaire de risque. En général, celui-ci est fixé à 95% ; il y a alors 95% de chances que le profit ou la perte encourue par l'institution financière durant la période de détention soit inférieur à la valeur de la VaR.
- b) L'horizon de temps représente la durée considérée, autrement dit le temps nécessaire pour déboucler des positions dans un univers dont la liquidité est assurée.

### 2.2.1 Définition formelle

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant le profit ou la perte aléatoire d'un investissement dans un horizon fixé. Soit  $F$  la fonction de répartition associée

à  $X$ . La VaR est alors définie par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha). \quad (2.1)$$

Par conséquent,  $\text{VaR}_\alpha(X)$  peut être interprété comme le montant minimal de capital ou mis en arrière par l'investisseur pour conserver sa solvabilité avec une probabilité supérieure ou égale à  $\alpha$ .

### 2.2.2 Notion de comonotonicité

Soient  $X_1$  et  $X_2$ , deux variables définies sur un même espace de probabilité. On dit que  $X_1$  et  $X_2$  sont comonotones si et seulement si l'on peut trouver deux fonctions croissantes  $f$  et  $g$ , ainsi qu'une variable aléatoire  $U$  uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 1]$ , tel que

$$X_1 = f(U) \quad \text{et} \quad X_2 = g(U). \quad (2.2)$$

## 2.3 Propriétés de la VaR

La VaR possède les propriétés suivantes.

**Propriété 1** *La  $\text{VaR}_\alpha(X)$  est translatrice et équivariante. Autrement dit, on a*

$$\text{VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c \quad (2.3)$$

*pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Démonstration** Puisque par définition on a

$$P\{X + c \leq \text{VaR}_\alpha(X + c)\} = \alpha,$$

on peut déduire que

$$P \{X \leq \text{VaR}_\alpha(X + c) - c\} = \alpha.$$

Ainsi,

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X + c) - c,$$

d'où le résultat.

**Propriété 2** *La  $\text{VaR}_\alpha$  est positivement homogène, ce qui signifie que pour tout  $c \geq 0$ , on a*

$$\text{VaR}_\alpha(cX) = c\text{VaR}_\alpha(X) \quad (2.4)$$

*et que pour tout  $c < 0$ , on a*

$$\text{VaR}_\alpha(cX) = c\text{VaR}_{1-\alpha}(X). \quad (2.5)$$

**Démonstration** Supposons d'abord que  $c \geq 0$ . Dans ce cas, on a

$$P \{cX \leq \text{VaR}_\alpha(cX)\} = \alpha$$

et donc

$$P \left\{ X \leq \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c} \right\} = \alpha.$$

Ceci implique que

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c},$$

d'où le résultat.

Considérons maintenant le cas où  $c < 0$ . Dans cette situation, nous avons

$$P \{cX \leq \text{VaR}_\alpha(cX)\} = \alpha,$$



ce qui est équivalent à

$$P \left\{ X > \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c} \right\} = \alpha.$$

Par conséquent,

$$P \left\{ X \leq \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c} \right\} = 1 - \alpha,$$

ce qui revient à dire que

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(cX)}{c},$$

soit encore

$$c \text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \text{VaR}_\alpha(cX).$$

**Remarque** Comme cas particulier de la propriété 2 où  $c = -1$ , on trouve

$$\text{VaR}_\alpha(-X) = -\text{VaR}_{1-\alpha}(X). \quad (2.6)$$

Tel que mentionné dans l'introduction, la VaR n'est généralement pas une mesure sous-additive. Cependant, dans le cas particulier où les risques sont comonotones, on peut montrer que  $\text{VaR}_\alpha(X)$  est additive. Cette observation est formalisée ci-dessous.

**Propriété 3** La  $\text{VaR}_\alpha$  est comonotone additive. En d'autres mots, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des risques comonotones, alors

$$\text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(X_i). \quad (2.7)$$

**Démonstration** Par définition, on a

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \leq \text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \right\} = \alpha.$$

En utilisant le fait que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont comonotones, on peut alors écrire

$$X_i = F_i^{-1}(U), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(U) \leq \text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \right\} = \alpha.$$

Posons maintenant

$$g(u) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(u) \quad \text{ct} \quad a = \text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right).$$

On a alors

$$\mathbb{P} \{g(U) \leq a\} = \alpha,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P} \{U \leq g^{-1}(a)\} = \alpha.$$

Par suite, on voit que  $g^{-1}(a) = \alpha$ , ce qui signifie que  $a = g(\alpha)$ . Par conséquent,

$$\text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(\alpha),$$

ce qui revient au même que

$$\text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(X_i).$$

## 2.4 Limites de la VaR

La VaR permet de juger comment l'utilisateur peut redistribuer les titres dans son portefeuille pour obtenir le niveau de risque désiré, mais celui-ci se doit

de comprendre les limites de cet instrument. De plus, l'étude effectuée par Beder (1995) vient compléter et appuyer mathématiquement ces limites. Elle démontre que la simplicité de la VaR est séduisante, mais que les résultats de l'estimation de la VaR ont une différence significative.

Les limites de la VaR se divisent essentiellement en deux catégories : les limites inhérentes au concept et celles résultant d'approximations délibérément consenties. Les unes et les autres seront passées en revue à tour de rôle dans les paragraphes suivants.

### 2.4.1 Limites conceptuelles

Les limites conceptuelles sont des facteurs importants à considérer. En effet, le concept de la VaR s'appuie sur des hypothèses qui sont parfois contestées par les faits. L'hypothèse de la normalité de la variation des prix utilisée dans certaines méthodes, telles que GARCH ou la méthode de volatilité constante est compromise par certains mouvements extrêmes des marchés. Les variations extrêmes des rendements journaliers, qu'ils soient positifs ou négatifs, se produisent plus fréquemment sur les marchés.

D'ailleurs, même si deux gestionnaires utilisent la même technique quantitative, ils appliquent souvent des hypothèses différentes faisant en sorte que les résultats de la VaR sont différents et que, par conséquent, les exigences de capital diffèrent.

La distribution relative des données joue un rôle important dans l'estimation de la VaR. Le Comité de Bâle suggère aux gestionnaires d'utiliser un minimum d'une année de données pour la calculer. Les changements structurels dans l'économie peuvent provoquer également une sous-estimation de

la VaR si ceux-ci sont soudains et imprévus. Le mécanisme des taux de change européens en est un exemple.

De plus, la difficulté des économistes à faire des prévisions conjoncturelles nous démontre que la capacité du passé à anticiper l'avenir au travers des modèles de prévisions économétriques est limitée. Selon Beder (1995), l'histoire doit se répéter pour que les résultats puissent prédire le futur.

Beder (1995) constate que les résultats sont différents d'une méthodologie à l'autre. De plus, dans plusieurs situations, l'estimation de la VaR n'est pas la méthodologie idéale pour évaluer correctement le risque de gestion. La VaR indique qu'avec une certaine probabilité, l'utilisateur peut s'attendre à éprouver des pertes considérables, mais cette méthodologie n'indique pas l'importance monétaire que celle-ci peut amener. Si le gestionnaire veut connaître la dimension et la fréquence de la plus mauvaise perte, la VaR ne lui fournit aucun conseil. En d'autres mots, la VaR pourrait la sous-estimer. Afin de contrer cet inconvénient, celui-ci peut utiliser la technique dite du "*Worst-Case Scenario Analysis*" (WCSA) proposé par Richardson & Whitclaw (1995).

Un autre point important à considérer est la liquidité des marchés. En effet, la VaR suppose que les titres sont liquides, pouvant être vendus à l'intérieur de l'horizon de temps calculé. Cependant, plusieurs titres de firmes sont illiquides, ne pouvant par conséquent être vendus rapidement. Si la vente pouvait avoir lieu, elle se ferait à un prix moindre, faisant en sorte que l'estimation de la VaR sous-estimerait la perte effectivement réalisée. La liquidité des marchés, qui suppose qu'on puisse vendre les positions à l'horizon choisi, n'est pas toujours celle qu'on attendait, surtout lors de forts

mouvements.

Pour choisir la bonne méthode, il est important de tenir compte de l'horizon de temps. Calculer la VaR sur une période particulière peut ne pas prendre l'option de liquidité d'un titre, si celui-ci ne peut être échangé sur l'horizon de temps calculé, créant par conséquent une limitation sur l'analyse d'exposition au vrai risque. En revanche, l'allongement de l'horizon limite à la prédiction de la volatilité par les modèles économétriques et repose sur l'hypothèse certainement fausse que le gestionnaire ne réagira pas durant la période.

Le risque de crédit est difficile à évaluer par l'estimation de la VaR. Par conséquent, il serait préférable pour le gestionnaire d'inclure une analyse du risque de crédit dans la méthodologie de la VaR. Le paramètre de probabilité est un facteur important à considérer. En effet, si la probabilité choisie est trop faible, il y a possibilité de sous-estimer le risque. En revanche, si elle est trop élevée, elle sera plus une mesure du bruit statistique qu'un indicateur de risque.

Plusieurs entreprises font l'erreur de calculer une VaR à 99%, en se disant qu'elles ne peuvent pas perdre plus que l'estimation de la VaR et cela à l'intérieur d'un pourcentage de temps, par exemple un peu moins de trois jours ouvrables par année. Or, on s'aperçoit que la VaR de niveau 99% change significativement en fonction de l'horizon de temps, de la base de données, des hypothèses de corrélation du modèle mathématique, ainsi que des techniques quantitatives qui sont utilisées. En conséquence, la VaR ne fournit pas avec certitude les résultats, mais plutôt une attente de résultats basée sur des hypothèses spécifiques. D'ailleurs, la critique ne repose pas

essentiellement sur les faiblesses du concept de la VaR, mais sur la diversité des hypothèses sous-jacentes qui viennent miner la méthode de la VaR par le manque d'accord des utilisateurs au sujet de la standardisation du produit.

### 2.4.2 Limites résultant d'approximations

La problématique étant posée et la réponse conceptuelle formulée, il reste dorénavant à surmonter les obstacles de la mise en œuvre. Les trois points critiques sont la qualité des données, la théorie appliquée et le traitement de l'information. Afin de compléter la VaR, tout gestionnaire se doit d'envisager le risque des mouvements extrêmes des marchés. On fera par exemple varier la courbe des taux de un pour cent. La seconde étape consisterait à l'actionner de façon cohérente. Ainsi, comme nous ne pouvons pas identifier les changements soudains dans l'économie et la fréquence des rendements extrêmes, il semble prudent d'utiliser différents scénarios, donc d'augmenter les calculs statistiques de la VaR avec des évaluations préjudiciables. Afin de réussir cela, il faut se baser sur des épisodes passés.

En fait, la VaR pourrait être basée sur des épisodes historiques semblables, en évitant les scénarios des théories économiques et des expériences empiriques désastreuses comme le changement de décisions de la banque centrale du pays, l'instabilité politique, les changements économiques structurels et autres événements dont la probabilité de se produire est faible ou qui ne se sont jamais passés. Ainsi, la capacité de sélectionner des scénarios appropriés est un élément important dans la justesse de l'estimation de la VaR.

Mélou (1998) appuie Beder (1995) et ajoute que le calcul de la VaR doit être validé par les faits. C'est l'objet du "*backtesting*." Celui-ci consiste à

s'assurer que le résultat réel ne dépasse la perte de la VaR que de temps en temps, la fréquence de dépassement correspondant à la probabilité choisie. Si elle survient plus souvent, on peut se poser la question de la pertinence du modèle utilisé, mais il y a peut-être d'abord le problème du résultat de l'activité à résoudre. Si elle survient moins souvent, le risque de l'activité est probablement surestimé. Finalement, on y retrouve un problème dans la mise en œuvre mais également dans l'interprétation des résultats.

Il est important de comprendre les limites et les techniques financières sophistiquées. Par conséquent, la VaR devrait être utilisée au sein d'une entreprise où le contexte ou la culture du management du risque est maîtrisée et ce, non seulement par le directeur de risque mais également par tous les hauts dirigeants. Selon Labrecque (1998), président de la *Manhattan Bank*, "la VaR est importante mais ne saurait être utilisée isolément." De plus, avoir de bons systèmes est important, mais on doit aussi pouvoir compter sur une bonne équipe de gestion.

## Chapitre 3

### VaR conditionnelle

Suite à la parution de l'article de Artzner et coll. (1999), il est devenu clair que la VaR ne saurait pas être considérée comme une méthodologie adéquate pour allouer le capital économique dans les institutions financières.

Tel que rapporté au chapitre précédent, la principale limitation liée à  $\text{VaR}_\alpha(X)$  vient de sa violation du principe de sous-additivité. Artzner et ses collaborateurs ont voulu suppléer à cette lacune en proposant une nouvelle mesure de risque appelée la valeur-à-risque conditionnelle, notée  $\text{ES}_\alpha(X)$ , également appelée “expected shortfall.”

Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs propriétés intéressantes de  $\text{ES}_\alpha(X)$ . De nombreuses illustrations numériques et graphiques, basées sur des modèles probabilistes classiques, y seront également traitées.



### 3.1 Définition et motivation

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant le risque associé à un portefeuille donné. Sa valeur conditionnelle à risque, notée  $\text{ES}_\alpha(X)$ , est une mesure de risque alternative à la  $\text{VaR}_\alpha$  que l'on définit comme suit :

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mathbb{E}\{X|X > \text{VaR}_\alpha(X)\}, \quad (3.1)$$

pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ . Parmi les avantages de  $\text{ES}_\alpha(X)$  figure la sous-additivité, ce qui signifie que

$$\text{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i^C),$$

où  $X_1^C, \dots, X_n^C$  désignent des risques comonotones et de mêmes lois marginales que les risques  $X_1, \dots, X_n$ . Cette propriété sera démontrée dans la suite.

### 3.2 Propriétés de la VaR conditionnelle

Dans cette section, nous allons examiner plusieurs propriétés intéressantes de cette nouvelle mesure de risque. Nous allons commencer par mettre en relief une relation qui lie la VaR conditionnelle à la VaR classique.

**Propriété 1** *Pour tout risque  $X$ ,  $\text{ES}_\alpha(X)$  peut s'écrire comme suit en terme de la valeur à risque de  $X$  :*

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) du. \quad (3.2)$$

**Démonstration** Par définition, nous avons

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mathbb{E}(X|X > \text{VaR}_\alpha),$$

qui peut s'écrire comme suit, en terme de la densité  $f$  de  $X$  :

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Nous savons que la variable aléatoire  $U = F(X)$  est de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Effectuons donc le changement de variable  $u = F(x)$  dans l'intégrale précédente. Nous obtenons alors

$$x = F^{-1}(u) = \text{VaR}_u(X).$$

Par conséquent, on aura

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) du.$$

Nous allons maintenant établir la propriété d'homogénéité de la VaR conditionnelle.

**Propriété 2** *La mesure  $\text{ES}_\alpha(X)$  est invariante par translation, ce qui signifie que pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\text{ES}_\alpha(X + c) = \text{ES}_\alpha(X) + c. \quad (3.3)$$

**Démonstration** D'après l'équation (3.2), nous observons que

$$\text{ES}_\alpha(X + c) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X + c) du.$$

On fait ensuite appel à la propriété de la VaR décrite en (1.5), à savoir

$$\text{VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c.$$

On obtient alors

$$\text{ES}_\alpha(X + c) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \{\text{VaR}_u(X) + c\} du = \text{ES}_\alpha(X) + c,$$

d'où le résultat.

Cette propriété montre que si l'on ajoute ou l'on retranche un montant  $c$  dans les comptes du centre de profit, le besoin en capital décroît ou augmente du même montant  $c$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la propriété d'homogénéité positive décrite par le résultat ci-dessous.

**Propriété 3** *La mesure  $ES_\alpha(X)$  est positivement homogène, de sorte que pour tout réel  $c \geq 0$ , on a*

$$ES_\alpha(cX) = cES_\alpha(X). \quad (3.4)$$

**Démonstration** En effet, par définition, on a

$$ES_\alpha(cX) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(cX) du$$

et en utilisant le fait que

$$VaR_u(cX) = cVaR_u(X)$$

pour tout  $u \in [0, 1]$ , on obtient alors

$$ES_\alpha(cX) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 cVaR_u(X) du = cES_\alpha(X),$$

ce qui achève la démonstration.

Le résultat suivant montre une décomposition convexe de l'espérance du risque en fonction de la mesure  $ES_\alpha(X)$ .

**Propriété 4** *Pour tout risque  $X$ , on a*

$$E(X) = (1-\alpha)ES_\alpha(X) - \alpha ES_{1-\alpha}(-X). \quad (3.5)$$

**Démonstration** Nous avons

$$\begin{aligned} E(X) &= E\{X|X > \text{VaR}_\alpha(X)\} P\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\} \\ &+ E\{X|X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} P\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ceci équivaut à

$$\begin{aligned} E(X) &= (1 - \alpha)E\{X|X > \text{VaR}_\alpha(X)\} + \alpha E\{X|X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} \\ &= (1 - \alpha)ES_\alpha(X) + \alpha E\{X|X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous pouvons ensuite faire appel au fait que

$$\begin{aligned} E\{X|X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} &= -E\{-X|-X \geq -\text{VaR}_\alpha(X)\} \\ &= -E\{-X|-X \geq \text{VaR}_{1-\alpha}(-X)\} \\ &= -ES_{1-\alpha}(-X). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par suite, on insérant (3.7) et (3.8) dans (3.6), on obtient (3.5), lequel est le résultat désiré.

**Remarque** *Comme conséquence du résultat précédent, nous avons la propriété suivante :*

$$ES_\alpha(cX) = -cES_\alpha(-X).$$

**Démonstration** D'après la propriété précédente, on a

$$ES_\alpha(-X) = \frac{\alpha ES_{1-\alpha}(X) - E(X)}{1 - \alpha},$$

et comme,  $ES_\alpha(cX) = ES_\alpha\{-(-cX)\}$ , il vient

$$ES_\alpha\{-(-cX)\} = \frac{\alpha ES_{1-\alpha}(-cX) - E(-cX)}{1 - \alpha}.$$

En utilisant la propriété 3, il résulte que

$$\text{ES}_\alpha(-X) = \frac{-c\alpha\text{ES}_{1-\alpha}(X) + c\text{E}(X)}{1-\alpha}$$

ce qui est équivalent à

$$\text{ES}_\alpha(-X) = -c \left\{ \frac{\alpha\text{ES}_{1-\alpha}(X) - \text{E}(X)}{1-\alpha} \right\},$$

d'où

$$\text{ES}_\alpha(cX) = -c\text{ES}_\alpha(-X).$$

Nous allons maintenant étudier la monotonie de la mesure  $\text{ES}_\alpha(X)$  au sens de l'ordre stochastique convexe défini ci-dessous.

**Définition** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  au sens de l'ordre convexe et on note  $X \prec_{\text{cx}} Y$  si et seulement si

$$\text{E}\{\phi(X)\} \leq \text{E}\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction convexe  $\phi$  pour laquelle ces espérances existent, ce qui est équivalent à dire que pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$\text{E}\{\max(0, X - t)\} \leq \text{E}\{\max(0, Y - t)\}.$$

Notons que l'ordre convexe est aussi appelé "ordre stop-loss" dans les écrits actuariels, où il est alors noté  $\prec_{\text{sl}}$ . Ainsi,  $X$  est inférieur à  $Y$  au sens  $\prec_{\text{sl}}$  si et seulement si la prime stop-loss de  $X$ , notée  $\pi_X(t) = \text{E}\{\max(0, X - t)\}$  est plus petite ou égale à celle de  $Y$ , et ce pour tout  $t \geq 0$ . De façon explicite, l'équation à vérifier est donc

$$\pi_X(t) \leq \pi_Y(t), \quad t \geq 0.$$

**Propriété 5** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. Alors

$$X \prec_{\text{cx}} Y \Rightarrow \text{ES}_\alpha(X) \leq \text{ES}_\alpha(Y).$$

**Propriété 6** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des risques comonotones, alors

$$\text{ES}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i). \quad (3.9)$$

**Démonstration** Par définition, on a

$$\text{ES}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) du \quad (3.10)$$

et puisque les risques  $X_1, \dots, X_n$  sont comonotones, alors d'après la propriété 3 de la VaR, vue au chapitre précédent, il vient

$$\text{VaR}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(X_i). \quad (3.11)$$

En invoquant (3.10) et (3.11), on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) du. \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \sum_{i=1}^n \text{VaR}_u(X_i) du \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X_i) du \\ &= \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i). \end{aligned}$$

### 3.3 Exemples et illustrations

Dans cette partie, nous illustrerons le calcul de la mesure  $ES_\alpha(X)$  dans quelques cas particuliers. Des calculs exacts seront présentés à la section 3.3.1. Puis, à la section 3.3.2, nous exploiterons la méthode de Monte-Carlo pour approcher la VaR conditionnelle de certains modèles où cette dernière ne peut être calculée explicitement.

#### 3.3.1 Formules explicites

Nous commençons par examiner le comportement de la VaR conditionnelle associée au modèle exponentiel.

**Exemple 1** *Si  $X$  est une variable aléatoire de loi exponentielle d'espérance  $\lambda$ , alors*

$$ES_\alpha(X) = \lambda - \lambda \ln(1 - \alpha). \quad (3.12)$$

Puisque la fonction de répartition de  $X$  est de la forme

$$F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$$

pour tout  $x \geq 0$ , on voit tout de suite que

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha) = -\lambda \ln(1 - \alpha).$$

Par conséquent,

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 -\lambda \ln(1 - u) du = \frac{-\lambda}{1 - \alpha} \int_0^{1-\alpha} \ln(v) dv$$

et après intégration, on trouve

$$ES_\alpha(X) = \lambda - \lambda \ln(1 - \alpha).$$

Tableau 3.1: Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle exponentiel lorsque  $\lambda = 2$

| $\alpha$ | $\text{VaR}_\alpha(X)$ | $\text{ES}_\alpha(X)$ |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 0,90     | 4,605                  | 6,605                 |
| 0,91     | 4,816                  | 6,816                 |
| 0,92     | 5,051                  | 7,051                 |
| 0,93     | 5,319                  | 7,319                 |
| 0,94     | 5,627                  | 7,627                 |
| 0,95     | 5,991                  | 7,991                 |
| 0,96     | 6,438                  | 8,438                 |
| 0,97     | 7,013                  | 9,013                 |
| 0,98     | 7,824                  | 9,824                 |
| 0,99     | 9,210                  | 11,210                |

Le tableau 3.1 donne les valeurs numériques de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  et de  $\text{ES}_\alpha(X)$  pour différents choix de  $\alpha$  lorsque  $\lambda = 2$ . La même information est représentée graphiquement à la figure 3.1. Quant à la figure 3.2, elle permet de comparer les courbes  $\text{VaR}_\alpha(X)$  et de  $\text{ES}_\alpha(X)$  en fonction de  $\alpha$ , pour trois valeurs possibles de  $\lambda$ , soit 2, 4 et 10.

**Exemple 2** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1 + \alpha}{2}. \quad (3.13)$$



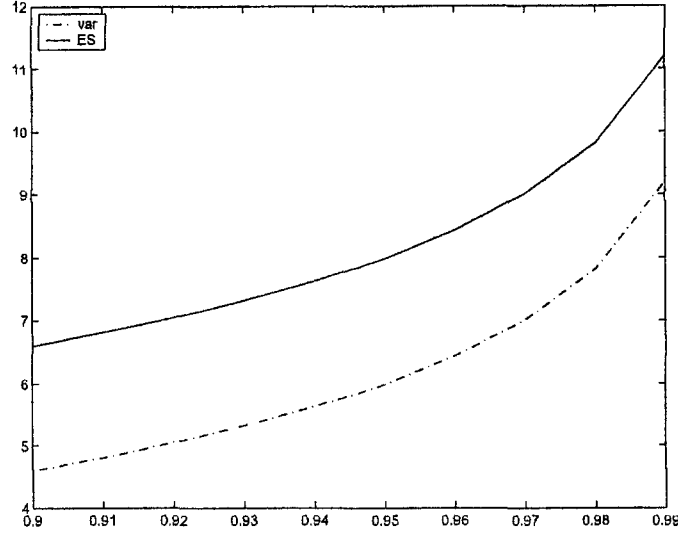


Figure 3.1: Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle exponentiel lorsque  $\lambda = 2$

En effet on sait que la fonction de répartition d'une variable uniforme est  $F(x) = x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Donc,

$$F^{-1}(u) = \text{VaR}_u(X) = u$$

pour tout  $u \in [0, 1]$ . Par conséquent,

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 u du = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Notre troisième exemple de calcul explicite porte sur le cas d'une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres  $\gamma > 0$  et  $\beta > 2$ .

**Exemple 3** Soit  $X$  une variable aléatoire de Pareto. Alors

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{-\gamma}{1-\alpha} \left\{ \frac{\beta(1-\alpha)^{1-1/\beta}}{\beta-1} - (1-\alpha) \right\}. \quad (3.14)$$

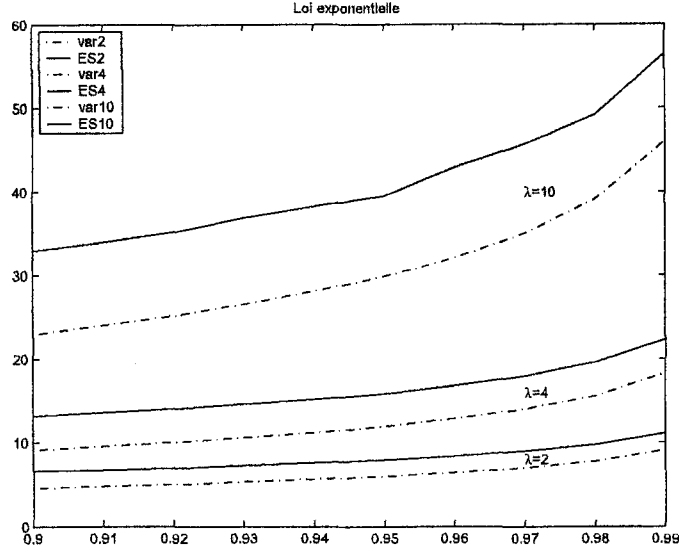


Figure 3.2: Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle exponentiel lorsque  $\lambda = 2, 4$ , and 10

En inversant la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètres  $\gamma > 0$  et  $\beta > 2$ , on trouve

$$\text{VaR}_u(X) = \gamma \{(1-u)^{-1/\beta} - 1\} \quad (3.15)$$

et donc

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \gamma \{(1-u)^{-1/\beta} - 1\} du.$$

En faisant le changement de variables  $v = 1 - u$ , on trouve

$$\text{ES}_\alpha(X) = -\frac{\gamma}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} (v^{-1/\beta} - 1) dv,$$

ce qui permet de conclure que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{-\gamma}{1-\alpha} \left[ \frac{\beta v^{1-1/\beta}}{\beta-1} - v \right]_0^{1-\alpha}.$$

Tableau 3.2: Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle de Pareto lorsque  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$

| $\alpha$ | $\text{VaR}_\alpha(X)$ | $\text{ES}_\alpha(X)$ |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 0,90     | 1,557                  | 4,817                 |
| 0,91     | 1,651                  | 5,071                 |
| 0,92     | 1,761                  | 5,362                 |
| 0,93     | 1,888                  | 5,702                 |
| 0,94     | 2,041                  | 6,109                 |
| 0,95     | 2,229                  | 6,612                 |
| 0,96     | 2,472                  | 7,259                 |
| 0,97     | 2,806                  | 8,148                 |
| 0,98     | 3,318                  | 9,515                 |
| 0,99     | 4,325                  | 12,199                |

Par suite,

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{-\gamma}{1-\alpha} \left\{ \frac{\beta(1-\alpha)^{1-1/\beta}}{\beta-1} - (1-\alpha) \right\}.$$

**Remarque** Notons qu'on peut exprimer  $\text{ES}_\alpha(X)$  en fonction de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  comme suit :

$$\text{ES}_\alpha(X) = \gamma \left\{ \frac{\beta \text{VaR}_\alpha(X) + 1}{\beta - 1} \right\}. \quad (3.16)$$

Le tableau 3.2 donne les valeurs de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  et  $\text{ES}_\alpha(X)$  lorsque  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$ . La même information est reproduite graphiquement à la figure 3.3.

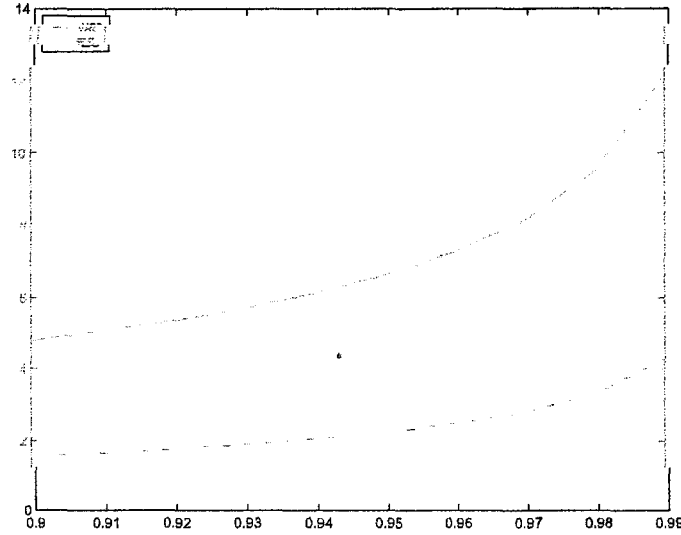


Figure 3.3: Courbes de la VaR. et de la VaR. conditionnelle pour le modèle de Pareto lorsque  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$

**Exemple 4** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Cauchy canonique. Alors

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{(1-\alpha)\pi} [\ln \{\sin(\alpha\pi)\} - 1]. \quad (3.17)$$

Sachant que la fonction de répartition de  $X$  est de la forme

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$

on voit tout de suite que

$$\text{VaR}_u(X) = F^{-1}(u) = \tan \left\{ \frac{(2u-1)\pi}{2} \right\}. \quad (3.18)$$

Par conséquent,

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \tan \left\{ \frac{(2u-1)\pi}{2} \right\} du.$$

Faisons maintenant le changement de variable  $y = (2u-1)\pi/2$ . On trouve ainsi

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{(1-\alpha)\pi} \int_{(2u-1)\pi/2}^{-\pi/2} \tan(y) dy,$$

ce qui implique que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{(1-\alpha)\pi} [-\ln\{\cos(y)\}]_{(2u-1)\pi/2}^{-\pi/2}.$$

Ceci nous permet de déduire que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{(1-\alpha)\pi} [\ln\{\sin(\alpha\pi)\} - 1].$$

Notons qu'il n'est pas toujours possible de calculer explicitement la VaR conditionnelle. Dans de telles situations, on doit avoir recours à la méthode de Monte-Carlo pour en déterminer la valeur. Il s'agit d'une méthode probabiliste permettant d'approcher des intégrales.

Dans la section suivante, nous allons illustrer cette méthode pour calculer  $\text{ES}_\alpha(X)$  lorsque  $X$  suit respectivement une loi normale et une loi de Weibull.

### 3.3.2 Principe de la méthode de Monte-Carlo

Soit  $f$  une fonction réelle intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ . La méthode de Monte-Carlo donne une approximation raisonnable de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ . L'idée de cette méthode consiste tout d'abord à générer une suite de variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 1]$ . On peut ensuite approcher l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par la somme suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\{a + (b-a)U_i\}.$$

Ci-dessous, nous allons appliquer cette approximation dans le contexte de la loi normale.

**Exemple 5** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  et de fonction de répartition  $F$ . Soit  $\Phi$  la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Dans ce cas, on trouve

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha) = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu$$

et par suite

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du + \mu.$$

Dans cet exemple, il est clairement impossible de calculer explicitement  $\text{ES}_\alpha(X)$ . Afin d'en approcher, on peut toutefois recourir à la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment. L'approximation voulue est

$$\text{ES}_\alpha(X) \approx \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \Phi^{-1} \{ \alpha + (1-\alpha)U_i \} + \mu.$$

Le tableau 3.3 donne des valeurs approchées de  $\text{ES}_\alpha(X)$  et  $\text{VaR}_\alpha(X)$  lorsque  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . La même information est reproduite graphiquement à la figure 3.4.

Tableau 3.3: Valeurs de la VaR. et de la VaR. conditionnelle pour le modèle normal centré réduit

| $\alpha$ | $\text{VaR}_\alpha(X)$ | $\text{ES}_\alpha(X)$ |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 0,90     | 1,282                  | 1,752                 |
| 0,91     | 1,341                  | 1,801                 |
| 0,92     | 1,405                  | 1,855                 |
| 0,93     | 1,476                  | 1,915                 |
| 0,94     | 1,555                  | 1,982                 |
| 0,95     | 1,645                  | 2,060                 |
| 0,96     | 1,751                  | 2,151                 |
| 0,97     | 1,881                  | 2,265                 |
| 0,98     | 2,054                  | 2,418                 |
| 0,99     | 2,326                  | 2,663                 |

**Exemple 6** Si  $X$  est une variable aléatoire de loi de Weibull de paramètres  $\beta > 0$  et  $\lambda > 0$ , alors

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 -\beta \{\ln(1-x)\}^{1/\lambda} dx. \quad (3.19)$$

Sachant que la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi de Weibull de paramètres  $\beta > 0$  et  $\lambda > 0$  s'exprime sous la forme

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\beta)^\lambda},$$

on voit sans difficulté que

$$\text{VaR}_u(X) = F^{-1}(u) = -\beta \{\ln(1-u)\}^{1/\lambda}, \quad (3.20)$$

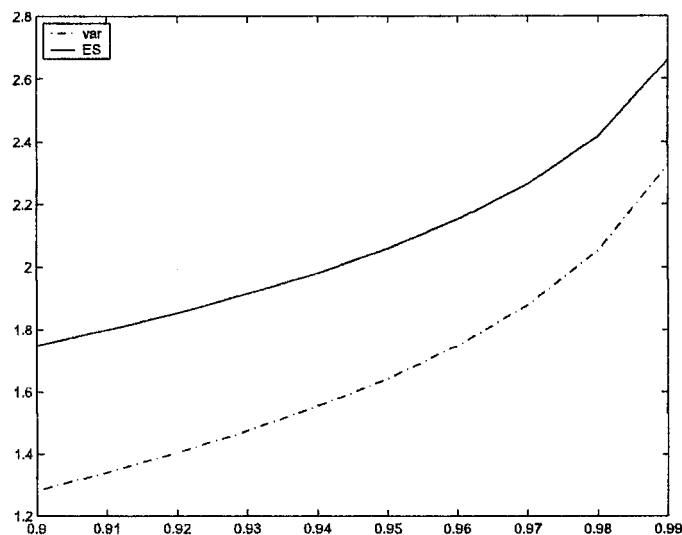


Figure 3.4: Courbes de la VaR. et de la VaR. conditionnelle pour le modèle normal centré réduit

d'où il s'ensuit que

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 -\beta \{\ln(1-u)\}^{1/\lambda} du.$$

Comme cette intégrale ne possède aucune primitive explicite, une approximation du résultat par la méthode de Monte-Carlo s'impose. Ainsi, on aura

$$\text{ES}_\alpha(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -\beta [\ln\{(1-\alpha)(1-U_i)\}]^{1/\lambda}.$$

Le tableau 3.4 donne le résultat de l'approximation de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  et de  $\text{ES}_\alpha(X)$  lorsque  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$ . La même information est donnée sous forme graphique à la figure 3.5.



Tableau 3.4: Valeurs de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle de Weibull avec paramètres  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$

| $\alpha$ | $\text{VaR}_\alpha(X)$ | $\text{ES}_\alpha(X)$ |
|----------|------------------------|-----------------------|
| 0,90     | 6,070                  | 7,196                 |
| 0,91     | 6,207                  | 7,314                 |
| 0,92     | 6,357                  | 7,444                 |
| 0,93     | 6,523                  | 7,588                 |
| 0,94     | 6,709                  | 7,751                 |
| 0,95     | 6,923                  | 7,939                 |
| 0,96     | 7,176                  | 8,164                 |
| 0,97     | 7,490                  | 8,443                 |
| 0,98     | 7,912                  | 8,822                 |
| 0,99     | 8,584                  | 9,434                 |

La dernière illustration, présentée à la figure 3.6, permet de comparer les valeurs de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  et de  $\text{ES}_\alpha(X)$  lorsque  $\lambda = 2, 4$  et  $10$  et que  $\beta = 4$ .

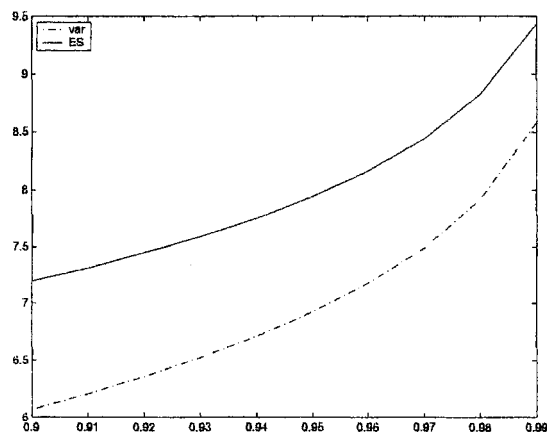
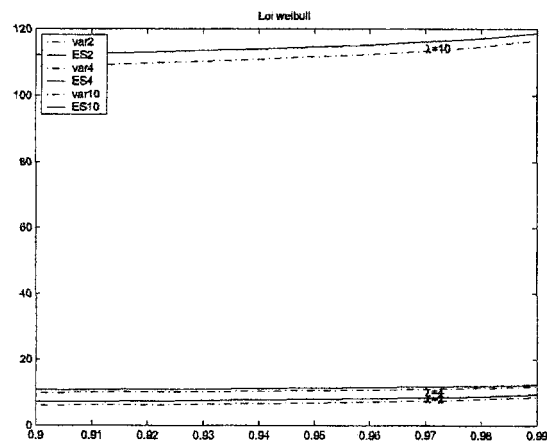


Figure 3.5: Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle de Weibull avec paramètres  $\lambda = 2$  et  $\beta = 4$

Figure 3.6: Courbes de la VaR et de la VaR conditionnelle pour le modèle de Weibull avec paramètres  $\lambda = 2, 4, 10$  et  $\beta = 4$



## Chapitre 4

# Calcul de majorants pour la VaR conditionnelle

Dans ce chapitre, nous allons déterminer des majorants pour la VaR conditionnelle de la somme  $X = X_1 + \dots + X_n$  de  $n \geq 2$  risques dont les lois marginales sont partiellement connues. Plus précisément, nous allons examiner deux méthodes permettant de construire des majorants de  $\text{ES}_\alpha(X)$  lorsque  $\mu_i = \text{E}(X_i)$  et  $\sigma_i^2 = \text{var}(X_i)$  sont connus pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

La première approche se basera sur le concept de monotonie. Cette solution a été proposée par Hürlimann (2002). Pour sa part, la seconde méthode fera l'objet d'une maximisation du majorant de  $\text{ES}_\alpha(X)$  par rapport à la variance du risque global  $X$ . Cette méthode a été introduite par Genest, et coll. (2002) pour fournir un majorant de la prime stop-loss de la somme de  $n$  risques.

À l'instar de Hürlimann (2002), la VaR et la VaR conditionnelle seront

définis dans ce chapitre par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(1 - \alpha) \quad \text{et} \quad \text{ES}_\alpha(X) = E(X|X > \text{VaR}_\alpha),$$

où  $F$  désigne la fonction de répartition du risque  $X$ .

## 4.1 Majorant supérieur univarié de la VaR conditionnelle

Soit  $X$  une variable aléatoire positive à valeurs dans un intervalle  $[A, B]$ . On suppose qu'on connaît seulement la moyenne  $\mu = E(X) > 0$  et la variance  $\sigma^2 = \text{var}(X) > 0$  du risque  $X$ . Dans ce contexte, Hürlimann (2002) (voir théorème 3.1) a obtenu le meilleur majorant possible de  $\text{ES}_\alpha(X)$ . Ce majorant est exprimé explicitement comme suit :

$$\text{ES}_{\alpha, \max}(X) = \begin{cases} B & \text{si } \alpha \leq f(\mu, \sigma), \\ t(\mu, \sigma, \alpha) & \text{si } f(\mu, \sigma) \leq \alpha \leq g(\mu, \sigma), \\ r(\mu, \alpha) & \text{si } \alpha \geq g(\mu, \sigma), \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$f(\mu, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (B - \mu)^2}, \quad (4.2)$$

$$g(\mu, \sigma) = \frac{(A - \mu)^2}{\sigma^2 + (A - \mu)^2}, \quad (4.3)$$

$$r(\mu, \alpha) = \mu + \frac{(\mu - A)(1 - \alpha)}{\alpha}, \quad (4.4)$$

et

$$t(\mu, \sigma, \alpha) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Majorant supérieur de la VaR conditionnelle de la somme de risques dépendants

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dénotons par  $X_i$  un risque borné à valeurs dans  $[A_i, B_i]$  pour lequel  $E(X_i) = \mu_i$  et  $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$  sont connus. On suppose que la structure de dépendance entre les risques  $X_1, \dots, X_n$  est inconnue. Notre objectif dans cette partie consiste à majorer la VaR conditionnelle de la somme  $X = X_1 + \dots + X_n$  de ces variables aléatoires. Plus spécifiquement, on veut déterminer un majorant de  $ES_\alpha(X)$ , qui se calculera explicitement en fonction des valeurs de  $\mu_i$  et de  $\sigma_i^2$  des risques individuels. Afin de résoudre ce problème, nous examinerons deux approches qui font intervenir le majorant univarié donné par (4.1).

### 4.2.1 Méthode basée sur la comonotonie

Le principe de cette méthode consiste à majorer chacune des VaR conditionnelles  $ES_\alpha(X_i)$  par la valeur correspondante de  $ES_{\alpha, \max}(X_i)$  obtenue en remplaçant respectivement  $\mu, \sigma, A$  et  $B$  par  $\mu_i, \sigma_i, A_i$  et  $B_i$  dans (4.1). Ainsi, on a

$$ES_\alpha(X_i) \leq ES_{\alpha, \max}(X_i)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Maintenant, considérons une suite de variables aléatoires comonotones  $X_1^C, \dots, X_n^C$  et de même lois marginales que les risques  $X_1, \dots, X_n$ . Posons  $X^C = X_1^C + \dots + X_n^C$ . En invoquant la propriété de stabilité de l'ordre convexe, on observe que

$$X \prec_{cx} X^C,$$

ce qui implique

$$\text{ES}_\alpha(X) \leq \text{ES}_\alpha(X^C).$$

Puisque  $X_1^C, \dots, X_n^C$  sont comonotones, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X^C) &= \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i^C) = \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \text{ES}_{\alpha, \max}(X_i) \equiv \text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{ES}_\alpha(X) \leq \text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \text{ES}_{\alpha, \max}(X_i). \quad (4.6)$$

Notons que le majorant  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)}$  donné par cette approche est explicitement calculée à partir de (4.1) et de (4.6). Ce résultat fait l'objet du théorème 5.1 de Hürlimann (2002).

#### 4.2.2 Méthode basée sur les corrélations

L'idée de cette méthode consiste à voir la somme  $X = X_1 + \dots + X_n$  comme une variable aléatoire univariée à valeurs dans  $[A, B]$ , avec  $A = A_1 + \dots + A_n$  et  $B = B_1 + \dots + B_n$ , et telle que

$$\text{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \sigma_\rho^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Par conséquent, on peut majorer  $\text{ES}_\alpha(X)$  par une valeur  $\text{ES}_{\alpha, \max}(X, \rho)$  calculée à partir de (4.1) avec  $A, B, \mu$  et  $\sigma_\rho^2$  définis ci-dessus. Notons que ce majorant est une fonction de la matrice  $\rho$  des corrélations  $\rho_{ij}$  spécifiées entre les risques  $X_i$  et  $X_j$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Pour obtenir un majorant

qui ne tiennent pas compte de la structure de corrélation, on doit maximiser  $ES_{\alpha, \max}(X, \rho)$  par rapport à la matrice  $\rho$ . Ainsi, on aura

$$ES_{\alpha}(X) \leq ES_{\alpha, \max}^{(2)},$$

où

$$ES_{\alpha, \max}^{(2)} = \max_{\rho} \{ES_{\alpha, \max}(X, \rho)\}. \quad (4.7)$$

En utilisant le fait que la fonction  $f(\mu, \sigma)$  définie par (4.2) est croissante en  $\sigma$  et que l'application  $g(\mu, \sigma)$  définie par (4.3) est décroissante en  $\sigma$ , on peut montrer que la solution du problème (4.7) sera explicitement donnée par le résultat suivant.

**Proposition** *Le majorant  $ES_{\alpha, \max}^{(2)}$  est explicitement donné par*

$$ES_{\alpha, \max}^{(2)} = \begin{cases} B & \text{si } \alpha \leq f(\mu^*, \sigma^*), \\ \max \{t(\mu^*, \sigma^*, \alpha), r(\mu^*, \alpha)\} & \text{si } f(\mu^*, \sigma^*) \leq \alpha \leq g(\mu^*, \sigma^*), \\ r(\mu^*, \alpha) & \text{si } \alpha \geq g(\mu^*, \sigma^*). \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $r(\mu^*, \alpha)$  et  $t(\mu^*, \sigma^*, \alpha)$  sont données par (4.4) et (4.5), avec

$$A = A_1 + \dots + A_n, \quad B = B_1 + \dots + B_n,$$

$$\mu^* = \mu_1 + \dots + \mu_n \quad \text{et} \quad \sigma^* = \sigma_1 + \dots + \sigma_n.$$

### 4.2.3 Majorants lorsque les risques sont non bornés

Dans plusieurs situations pratiques, il arrive que les risques  $X_1, \dots, X_n$  soient non bornés. Pour majorer la VaR conditionnelle de  $X = X_1 + \dots + X_n$ , il

suffit alors de prendre  $A_i = 0$  et  $B_i \rightarrow \infty$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  dans (4.6) et (4.8). Ainsi ces derniers majorants se réduisent-ils à

$$\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \text{ES}_{\alpha, \max}(X_i), \quad (4.9)$$

avec

$$\text{ES}_{\alpha, \max}(X_i) = \begin{cases} \mu_i + \sigma_i \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \mu_i^2 / (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \\ \mu_i / \alpha & \text{si } \alpha \geq \mu_i^2 / (\mu_i^2 + \sigma_i^2), \end{cases} \quad (4.10)$$

et

$$\text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)} = \begin{cases} \mu^* + \sigma^* \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \mu^{*2} / (\mu^{*2} + \sigma^{*2}) \\ \mu^* / \alpha & \text{si } \alpha \geq \mu^{*2} / (\mu^{*2} + \sigma^{*2}), \end{cases} \quad (4.11)$$

avec

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad \text{ct} \quad \mu^* = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Remarquons que les majorants  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)}$  et  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)}$  ci-dessus coïncident lorsque les coefficients de variation des risques sont égaux, c'est-à-dire quand

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \dots = \frac{\mu_n}{\sigma_n}.$$

Ceci est le cas, par exemple, du modèle exponentiel.

### 4.3 Comparaisons des deux approches

Pour avoir une idée de la meilleure approche, nous allons faire une comparaison des majorants (4.9) et (4.11) dans le cas où  $X = X_1 + X_2$ . On suppose



sans perte de généralité que  $\sigma_1/\mu_1 \leq \sigma_2/\mu_2$ . Ceci implique que

$$\frac{\sigma_1}{\mu_1} \leq \frac{\sigma^*}{\mu^*} \leq \frac{\sigma_2}{\mu_2}$$

et par conséquent

$$t_1 \leq t^* \leq t_2$$

avec

$$t^* = \frac{\mu^{*2}}{\mu^{*2} + \sigma^{*2}} \quad \text{ct} \quad t_i = \frac{\mu_i^2}{\mu_i^2 + \sigma_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Maintenant, de (4.9), (4.10) et (4.11), on observe que  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)}$  et  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)}$  coïncident lorsque  $\alpha \in [0, t_1] \cup [t_2, 1]$ . Il est facile de voir que lorsque  $\alpha \in [t_1, t_2]$ ,  $\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)} \leq \text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)}$ . En effet, si  $\alpha \in [t_1, t^*]$ , on a

$$\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)} \leq \text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)}$$

et donc

$$\mu_1/\alpha + \mu_2 + \sigma_2 \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \leq \mu^* + \sigma^* \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

ce qui est équivalent à  $\alpha \in [t_1, t^*]$ . De même, si  $\alpha \in [t^*, t_2]$ , on voit que

$$\text{ES}_{\alpha, \max}^{(1)} \leq \text{ES}_{\alpha, \max}^{(2)},$$

ce qui signifie que

$$\frac{\mu_1}{\alpha} + \mu_2 + \sigma_2 \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \leq \frac{\mu^*}{\alpha},$$

ce qui est la même chose que  $\alpha \in [t^*, t_2]$ , d'où le résultat.

Par conséquent l'approche basée sur la comonotonicité est meilleure que celle basée sur la corrélation. Notons que pour la VaR, Genest et coll. (2002) ont fait la même constatation dans le cas  $n = 2$ . En d'autres termes, la méthode basée sur la comonotonicité fournit de meilleurs majorants sur la

VaR classique. Toutefois, Mesfioui & Quessy (2005) ont récemment montré que pour majorer la VaR, l'approche fondée sur les corrélations surpasse celle qui optimise directement à partir de la structure de dépendance sous-jacente aux risques, au moins dans le cas  $n = 2$ .

## 4.4 Exemple numérique

Cette section présente une brève illustration numérique du calcul des majorants  $ES_{\alpha, \max}^{(1)}$  et  $ES_{\alpha, \max}^{(2)}$  obtenues par les deux approches décrites dans les sections précédentes. Nous examinerons le cas où les risques sont bornés. Pour ce faire, nous choisirons dix risques  $X_1, \dots, X_{10}$  bornés et distribués selon le modèle Bêta. Plus précisément, nous supposons que

$$X_i \sim \text{Bêta}(a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, 10$$

ce que signifie que la densité  $f_i$  de  $X_i$  est de la forme

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a_i, b_i)} x^{a_i-1} (1-x)^{b_i-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,

$$\Gamma(a_i, b_i) = \int_0^1 x^{a_i-1} (1-x)^{b_i-1} dx.$$

Ainsi la moyenne et la variance de  $X_i$  seront respectivement données par

$$\mu_i = \frac{a_i}{a_i + b_i} \quad \text{et} \quad \sigma_i^2 = \frac{a_i b_i}{(a_i + b_i)^2 (a_i + b_i + 1)}, \quad i = 1, \dots, 10.$$

Afin de faire une comparaison numérique des majorants en question, on pose

$$a_i = i \quad \text{et} \quad b_i = i + 1, \quad i = 1, \dots, 10.$$

Tableau 4.1: Valeurs numériques des deux majorants de la VaR. conditionnelle de la somme de  $n$  variables Bêta

| $\alpha$ | $ES_{\alpha, \max}^{(1)}$ | $ES_{\alpha, \max}^{(2)}$ |
|----------|---------------------------|---------------------------|
| 0,1      | 10,320                    | 44,096                    |
| 0,2      | 8,000                     | 22,048                    |
| 0,3      | 6,958                     | 14,699                    |
| 0,4      | 6,369                     | 11,024                    |
| 0,5      | 5,983                     | 8,819                     |
| 0,6      | 5,703                     | 7,349                     |
| 0,7      | 5,602                     | 6,299                     |
| 0,8      | 5,353                     | 5,512                     |
| 0,9      | 5,171                     | 4,899                     |

Les valeurs numériques des majorants  $ES_{\alpha, \max}^{(1)}$  et  $ES_{\alpha, \max}^{(2)}$  sont consignées au tableau 3.5, Comme on peut le constater, le majorant  $ES_{\alpha, \max}^{(1)}$  fourni par l'approche de Hürlimann (2002) est ici bien plus fin que celui donné par la formule  $ES_{\alpha, \max}^{(2)}$ .

# Bibliographie

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber & D. Heath (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- [2] T. S. Beder (1995). VaR: Seductive but dangerous. *Financial Analysts Journal*, September–October, pp. 12–24.
- [3] C. Genest, É. Marceau & M. Mesfioui (2002). Upper stop-loss bounds for sums of possibly dependent risks with given means and variances. *Statistics and Probability Letters*, 57, 33–41.
- [4] P. Glasserman (2005). L’art de la gestion des risques: Rechercher la précision par la Value at Risk. *Lesechos.fr, Le web de l’économie*. Document téléchargeable à l’adresse [http://www.lsechos.fr/formations/risques/articles/article\\_7\\_3.htm](http://www.lsechos.fr/formations/risques/articles/article_7_3.htm).
- [5] D. Hendricks (1996). Evaluation of value at risk using historical data. *Economic Policy Review*, avril, pp. 39–69.
- [6] W. Hürlimann (2002). Analytical bounds for two value-at-risk functionals. *Astin Bulletin*, 32, 235–265.

- [7] T. Labrecque (1998). Entrevue du président de la *Chase Manhattan Bank*, réalisé le 13 mai 1998 par Martin McLaughlin à Washington, DC.
- [8] M. Mélou (1998). VaR: Quelle mise sur la table du casino. *Les échos, l'art de la finance*. Québec, mai 1998, 2 pages.
- [9] M. Mesfioui & J.-F. Quessy (2005). Bounds on the value-at-risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 135–151.
- [10] J. P. Morgan (1996). *RiskMetrik*. Document technique, 4ième édition. J. P. Morgan Trust Company, New-York.
- [11] M. Richardson & R. F. Whitclaw (1995). Expect the worst: Rethinking the value at risk concept using worst case scenario analysis, and its implications for risk management. *Risk*, 8 (9), 100–101.
- [12] W. Sharp (1963). A simplified model for portfolio selection. *Management Science*, 9, 277–293.